

**Tables de vérité des connecteurs**

$p$	$\neg p$	$p$	$q$	$p \wedge q$	$p$	$q$	$p \vee q$	$p$	$q$	$p \rightarrow q$
V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F	F	F	F	F	V

**Construction d'une table de vérité.**

1. pour  $n$  propositions atomiques,  $2^n$  lignes (2 pour une 2 propositions, 4 pour 3, 8 pour 4).
2. commencer par évaluer les sous-formules les plus au fond des parenthèses.

**Tables pour les tautologies.**  $\phi$  est une tautologie si sa table contient uniquement des V.

**Tables pour les arguments valides.**  $\phi, \psi \models \chi$  si et seulement si il n'y a pas de ligne où  $\phi$  et  $\psi$  sont vrais et  $\chi$  et faux.

**Règles de construction des arbres**

Négation 
$$\begin{array}{l} V : \neg\phi \\ | \\ F : \phi \end{array}$$

$$\begin{array}{l} F : \neg\phi \\ | \\ V : \phi \end{array}$$

Conjonction 
$$\begin{array}{l} V : \phi \wedge \psi \\ | \\ V : \phi \\ V : \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{l} F : \phi \wedge \psi \\ / \quad \backslash \\ F : \phi \quad F : \psi \end{array}$$

Disjonction 
$$\begin{array}{l} V : \phi \vee \psi \\ / \quad \backslash \\ V : \phi \quad V : \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 F : \phi \vee \psi \\
 | \\
 F : \phi \\
 F : \psi
 \end{array}$$

Implication

$$\begin{array}{c}
 V : \phi \rightarrow \psi \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 F : \phi \quad V : \psi
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 F : \phi \rightarrow \psi \\
 | \\
 V : \phi \\
 F : \psi
 \end{array}$$

### Méthode de construction des arbres

1. Chaque formule ou sous-formule complexe doit être développée *une fois*, et elle ne doit l'être *qu'une seule fois*. On indique généralement une supposition qui a été traitée par un  $\surd$ . Lorsque toutes les formules complexes ont été développées, l'arbre est achevé.
2. Lorsqu'on développe une formule, *on doit appliquer le résultat à toutes les branches qui sont en-dessous*, et seulement à celles-ci.
3. Chaque possibilité est décrite par les valeurs des propositions atomiques sur une branche *entière* de l'arbre, *de l'extrémité à la racine*.
4. Si une branche contient une contradiction ( $V : \phi$  et  $F : \phi$ ), alors elle ne décrit pas de situation possible, et on dit qu'elle est *fermée*. On le note par un  $\times$ . Sinon, elle est ouverte, et on le note par un  $\surd$ . Lorsque toutes les branches de l'arbre sont fermées, il est impossible de réaliser les suppositions initiales, et on dit que l'arbre est fermé.

Maximes pour réduire la taille des arbres :

1. Lorsqu'on a le choix, développer d'abord les suppositions qui n'ouvrent pas deux branches.
2. Dès qu'une contradiction est apparue dans une branche, on peut la fermer ( $\times$ ) et cesser de la développer. En effet, toutes les branches qui en seront issues contiendront elles-mêmes cette contradiction, et seront fermées.

**Arbres pour les tautologies**  $\phi$  est une tautologie si l'arbre de la supposition  $F : \phi$  est fermé.

**Arbres pour les arguments valides**  $\phi, \psi \models \chi$  si et seulement si l'arbre des suppositions  $V : \phi, V : \psi$  et  $F : \chi$  est fermé.