

Exercice 6.1 Termes singuliers

Soulignez les termes singuliers en position de sujet dans les propositions suivantes, lorsqu'il y en a.

1. L'inspecteur Dufour a mené l'enquête.
2. Antoine n'a pas de voiture.
3. La fête n'a pas fait long feu.
4. La plupart des invités sont partis.
5. Le plus grand cirque du monde est en train de s'agrandir.
6. Il est malade.
7. Quelqu'un doit aller chercher à boire.
8. Cette injustice a durablement déprimé Paul.
9. Les deux sœurs sont parties se promener.
10. Une personne s'occupera de Pierre.

Exercice 6.2 Prédicats

Dites quels sont les prédicats dans les propositions de l'exercice 6.1.

1. ...a mené l'enquête.
2. ...a une voiture.
3. ...a fait long feu.
4. ...est parti.
5. ...est en train de s'agrandir.
6. ...est malade.
7. ...doit aller chercher à boire.
8. ...a durablement déprimé Paul.
9. ...est parti se promener.
10. ...s'occupera de Pierre.

Exercice 6.3 Traduction dans le langage des prédicats

Formalisez dans le langage des prédicats les propositions de l'exercice 6.1. où vous avez trouvé un terme singulier en position de sujet.

1. L'inspecteur Dufour a mené l'enquête.
Vocabulaire : a : L'inspecteur Dufour
 Px : x a mené l'enquête.
Traduction : Pa
2. Antoine n'a pas de voiture.
Vocabulaire : a : Antoine
 Px : x a une voiture.
Traduction : $\neg Pa$
3. La fête n'a pas fait long feu.
Vocabulaire : a : La fête
 Px : x a fait long feu.
Traduction : $\neg Pa$
5. Le plus grand cirque du monde est en train de s'agrandir.

Vocabulaire : a : Le plus grand cirque du monde

Px : x est en train de s'agrandir.

Traduction : Pa

6. Il est malade.

Vocabulaire : a : il

Px : x est malade.

Traduction : Pa

8. Cette injustice a durablement déprimé Paul.

Vocabulaire : a : Cette injustice

Px : x a durablement déprimé Paul.

Traduction : Pa

Exercice 6.4. Proposition singulières et logique propositionnelle

Formalisez les phrases suivantes dans le langage des prédicats, en conservant autant de structure que possible.

1. Pierre marche et Jean court.

Vocabulaire : a : Pierre

b : Jean

Mx : x marche.

Cx : x court.

Traduction : $Ma \wedge Cb$

2. Si Pierre court, alors Pierre sera fatigué.

Vocabulaire : a : Pierre

Cx : x court.

Fx : x est fatigué.

Traduction : $Ca \rightarrow Fa$

3. La voiture de Paul ne démarre plus.

Vocabulaire : a : La voiture de Paul

Dx : x démarre. (ou x démarre encore)

Traduction : $\neg Da$

4. Marie viendra, mais pas Jeanne.

Vocabulaire : a : Marie

b : Jeanne

Vx : x viendra.

Traduction : $Va \wedge \neg Vb$

5. Si François joue avec le feu, il va se faire mal.

Vocabulaire : a : François

Jx : x joue avec le feu.

Mx : x va se faire mal.

Traduction : $Ja \rightarrow Ma$

6. Cette table semble parfaite, ou je suis mal avisé.

Vocabulaire : a : cette table

b : moi

Sx : x semble parfait.

Mx : x est mal avisé.

Traduction : $Sa \vee Mb$

7. Si le président de la République ne répond pas aux questions, alors l'éditorialiste écrira un article ravageur.

Vocabulaire : a : le président de la République
 b : l'éditorialiste
 Rx : x répond aux questions.
 Ex : x écrira un article ravageur.

Traduction : $\neg Ra \rightarrow Eb$

8. Si le match se termine tôt alors le métro sera plein, à moins que notre équipe gagne.¹

Vocabulaire : a : le match
 b : le métro
 c : notre équipe
 Tx : x se termine tôt.
 Px : x sera plein.
 Gx : x gagne.

Traduction : $(Ta \rightarrow Pb) \vee Gc$

Commentaire. « A à moins que B » équivaut à $A \vee B$. On peut le vérifier en faisant la table de vérité de « A à moins que B ».

9. Antoine ou Pierre ont un vélo.

Vocabulaire : a : Antoine
 b : Pierre
 Vx : x a un vélo.

Traduction : $Va \vee Vb$

10. Si cet homme ou son ami reviennent dans le quartier, je ferai signe.

Vocabulaire : a : cet homme
 b : l'ami de cet homme
 c : moi
 Rx : x revient dans le quartier.
 Sx : x fera signe.

Traduction : $(Ra \vee Rb) \rightarrow Sc$

6.5. Quantificateurs

Soulignez les quantificateurs dans les phrases suivantes, et formalisez celles-ci dans le langage des prédicats.

1. Quelqu'un arrive.

Vocabulaire : Ax : x arrive

Traduction : $\exists xAx$

2. Personne n'est venu.

Vocabulaire : Vx : x est venu

Traduction : $\neg \exists xVx$

3. Quelques champignons sont comestibles.

Vocabulaire : Cx : x est un champignon

Mx : x est comestible

Traduction : $\exists x(Cx \wedge Mx)$

4. Tous les petits oiseaux volent.

¹(et non « les métros seront pleins », l'énoncé original comportait une erreur.)

Vocabulaire : Ox : x est un petit oiseau
 Vx : x vole

Traduction : $\forall x(Ox \rightarrow Vx)$

Commentaire. Les phrases universelles affirmatives comme celles-ci doivent être traduites par une *implication* (\rightarrow), et non une conjonction (\wedge). En effet, $\forall x(Ox \wedge Vx)$ signifierait « Toute chose est un petit oiseau et vole ».

5. Tous les enfants aiment les bonbons.

Vocabulaire : Ex : x est un enfant
 Ax : x aime les bonbons

Traduction : $\forall x(Ex \rightarrow Ax)$

6. Aucun enfant ne déteste les bonbons.

Vocabulaire : Ex : x est un enfant
 Dx : x déteste les bonbons

Traduction : $\neg \exists x(Ex \wedge Dx)$
ou : $\forall x(Ex \rightarrow \neg Dx)$

Commentaire. Les deux traductions sont logiquement équivalentes, et je ne pense pas que l'une soit plus proche du français que l'autre (si toutefois c'est le cas, ce sera la première). La première peut se lire : « Il est faux qu'un enfant déteste les bonbons ». La seconde : « Tous les enfants sont tels qu'ils ne détestent pas les bonbons », ou, en mauvais français, « Tous les enfants sont non-détesteurs de bonbons ».

Exercice 6.6. Quantificateurs : du calcul des prédicats au français.

Cet exercice fait appel à des notions de calcul des prédicats non-monadiques (les *relations*, symbolisées par des formules comme Rab). Les questions 3 à 5 sont exclues. Traduisez les formules suivantes en français en utilisant les correspondances :

a, b, c : Antoine, Brigitte, Céline

Px : x se promène.

1. Pb : Brigitte se promène

2. $\exists xPx$: Quelqu'un se promène.

Exercice 7.1 Variables libres et variables liées

Dans les formules suivantes : a) soulignez les variables libres, b) entourez les variables liées et indiquez par une flèche quel connecteur les lie.

Pour la correction, les variables liées sont en **gras** ; les variables libres soulignées.

1. $P\underline{x}$
2. $\forall xP\underline{\mathbf{x}}$: x est lié par le $\forall x$
3. $\exists yQ\underline{x}$
4. $\exists y(Q\underline{\mathbf{y}} \wedge P\underline{\mathbf{y}})$: les deux occurrences de y sont liées par $\exists y$
5. $\forall xP\underline{\mathbf{x}} \wedge Q\underline{x}$: la première occurrence de x est liée par $\forall x$ (mais la seconde ne l'est pas).
Commentaire. En l'absence de parenthèse, le quantificateur ne porte que sur la sous-formule qui le suit immédiatement, comme la négation. La formule (5) est donc équivalente à $\forall x(Px) \wedge Qx$. C'est pourquoi le quantificateur $\forall x$ ne porte que sur le premier x et pas sur le second.
6. $\forall xP\underline{\mathbf{x}} \wedge Q\underline{y}$: x est lié par $\forall x$
7. $P\underline{x} \rightarrow \exists xQ\underline{\mathbf{x}}$: la seconde occurrence de x est liée par $\exists x$ (mais pas la première.)
8. $\exists x(P\underline{\mathbf{x}} \rightarrow Q\underline{\mathbf{x}})$: les deux occurrences de x sont liées par $\exists x$
9. $\forall x\exists y(Px \wedge Qy)$: x est lié par $\forall x$, y est lié par $\forall y$.
10. $\forall x(P\underline{\mathbf{x}} \rightarrow \exists y(Q\underline{\mathbf{y}} \wedge R\underline{\mathbf{x}}))$: les deux occurrences de x sont liées par $\forall x$, l'occurrence de y est liée par $\exists y$.

Commentaire général. Il ne fallait jamais entourer (ou souligner) les x et les y qui apparaissent dans $\exists x$ et $\exists y$: ce ne sont pas des variables du tout ! L'expression « $\exists x$ » forme un tout, c'est un quantificateur. Le fait qu'il y ait un x ou un y indique seulement sur quelle variable il porte.

Exercice 7.2. Formules ouvertes et formules fermées Rappelez la définition d'une formule fermée. Dites si les formules ci-dessous sont ouvertes ou fermées.

Une formule est fermée si elle ne contient pas de variable libre. Elle est ouverte sinon.

1. Pa fermée
2. $\exists xQx$ fermée
3. $\forall xPx \vee Q\underline{x}$ ouverte. La seconde occurrence de x est libre. (N'oubliez pas qu'en l'absence de parenthèse, le quantificateur ne s'applique qu'à la sous-formule qui le suit immédiatement. Ici, c'est comme si on avait : $\forall x(Px) \vee Qx$.)
4. $\exists y(Qy \rightarrow Py)$ fermée
5. $Q\underline{y} \rightarrow \exists yPy$ ouverte, la première occurrence de y est libre.
6. $\forall x(Px \wedge Qx)$ fermée
7. $\forall x(Px \rightarrow Q\underline{y})$ ouverte, l'occurrence de y est libre. (Elle est dans la portée du quantificateur $\forall x$, mais ce quantificateur ne peut lier que les occurrences de x .)
8. $Q\underline{x} \rightarrow \exists yQy$ ouverte, l'occurrence de x n'est pas liée.

Exercice 7.3. Traduction en langage des prédicats

A. Traduisez les phrases suivantes dans le langage des prédicats. Conservez autant de structure que possible. Utilisez les traductions suivantes pour les prédicats :

Px : x est plombier

Hx : x est un homme

Rx : x est riche

1. Tous les plombiers sont des hommes

$\forall x(Px \rightarrow Hx)$

2. Pierre est riche

a : Pierre

Ra

3. Si Pierre est un plombier, Pierre est riche

a : Pierre

$Pa \rightarrow Ra$

4. Tous les hommes sont plombiers ou riches

$\forall x(Hx \rightarrow (Px \vee Rx))$

5. Quelques plombiers sont riches

$\exists x(Px \wedge Rx)$

6. Quelques plombiers ne sont pas riches

$\exists x(Px \wedge \neg Rx)$

7. Aucun plombier n'est riche

$\neg \exists x(Px \wedge Rx)$

(On peut aussi accepter $\forall x(Px \rightarrow \neg Rx)$)

8. Tous les hommes sont plombiers

$\forall x(Hx \rightarrow Px)$

9. Tous les hommes ne sont pas plombiers

$\neg \forall x(Hx \rightarrow Px)$

(Bien que $\exists x(Hx \wedge \neg Px)$ soit logiquement équivalent, il ne correspond pas exactement à la phrase française; il correspondrait à « Quelques hommes ne sont pas plombiers » ou « Il y a des hommes qui ne sont pas plombiers ». La traduction ci-dessus, au contraire, conserve le quantificateur « tout » de la phrase française.)

On pourrait soutenir que la phrase est ambiguë. La lecture naturelle, celle qui est formalisée comme ci-dessus, est « Il est faux que tous les hommes soient plombiers ». Mais il peut y avoir une seconde lecture (bien moins naturelle), selon laquelle la phrase signifie « tous les hommes sont non-plombiers » (soit, aucun homme n'est plombiers). La formalisation de cette seconde lecture est $\forall x(Hx \rightarrow \neg Px)$. En examen, la première lecture est la seule obligatoire; vous pouvez ajouter la seconde si elle vous semble possible pour la phrase en question.

(B) Traduisez les formules (1) à (8) de l'exercice 7.4 ci-dessous en français. Utilisez les traductions des prédicats ci-dessus, ainsi que :

Qx : x habite à Quimper

a : Antoine

b : Béatrice

c : Christine

1. Pa
Antoine est plombier.
2. Qc
Christine habite à Quimper.
3. Rb
Béatrice est riche.
4. $\exists xQx$
Quelqu'un habite à Quimper.
5. $\forall xPx$
Tous sont plombiers.
6. $\forall x(Px \rightarrow Qx)$ Tous les plombiers habitent à Quimper.
7. $\exists x(Qx \wedge \neg Px)$ Quelque habitant de Quimper n'est pas plombier. (Il y a un habitant de Quimper qui n'est pas plombier.)
8. $\neg \exists xRx$ Personne n'est riche.

Exercice 7.4. Vérité dans un modèle

Soit le modèle $M (D, I)$ suivant, dites si les formules suivantes sont vraies ou fausses dans M .

- $D = \{ \text{Antoine, Béatrice, Christine} \}$
- $I(a) = \text{Antoine}$
- $I(b) = \text{Béatrice}$
- $I(c) = \text{Christine}$
- $I(P) = \{ \text{Antoine, Christine} \}$
- $I(Q) = \{ \text{Antoine, Béatrice, Christine} \}$
- $I(R) = \emptyset$

1. Pa
Vraie dans M parce que $I(a)$ appartient à $I(P)$. (ou : $I(a)$ est dans l'extension de P , ou : le référent de a est dans l'extension de P .)
2. Qc
Vraie dans M parce que $I(c)$ appartient à $I(Q)$.
3. Rb
Fausse dans M parce que $I(b)$ n'appartient pas à $I(R)$.
4. $\exists xQx$
Vraie dans M parce qu'une instance au moins de cette formule est vraie dans M : Qc est vraie dans M .
5. $\forall xPx$
Fausse dans M parce que toutes ses instances ne sont pas vraies dans M : Pb est fausse dans M .
6. $\forall x(Px \rightarrow Qx)$
Vraie dans M parce que toutes ses instances sont vraies dans M :
 - $Pa \rightarrow Qa$ est vraie dans M parce que Qa est vraie dans M .
 - $Pb \rightarrow Qb$ est vraie dans M parce que Qb est vraie dans M .
 - $Pc \rightarrow Qc$ est vraie dans M parce que Qc est vraie dans M .

7. $\exists x(Qx \wedge \neg Px)$

Vraie dans M parce qu'une instance au moins est vraie dans M : $Qb \wedge \neg Pb$ est vraie dans M. Pb est faux dans M, donc $\neg Pb$ est vraie dans M, et Qb est vraie dans M. Donc $Qb \wedge \neg Px$ est vraie dans M.

8. $\neg \exists xRx$

Vraie dans M parce que $\exists xRx$ est fausse dans M. $\exists xRx$ est fausse dans M parce qu'il n'y a pas d'instance vraie de cette formule dans M :

Ra est fausse dans M.

Rb est fausse dans M.

Rc est fausse dans M.

9. $\exists x(\neg Qx \rightarrow Px)$

Vraie dans M parce qu'une instance au moins de cette formule est vraie dans M : $\neg Qa \rightarrow Pa$ est vraie dans M. En effet, Qa est vraie dans M, donc $\neg Qa$ est fausse, donc $\neg Qa \rightarrow Pa$ est vraie dans M.

Commentaire. On aurait pu aussi choisir l'une des autres instances : $\neg Qb \rightarrow Pb$ ou $\neg Qc \rightarrow Pc$. Dans tous les cas, l'antécédent de l'implication ($\neg Qb$, ou $\neg Qc$) est faux, donc l'implication est vraie.

10. $\exists x \neg(Qx \rightarrow Px)$

Vraie dans M parce qu'une instance au moins de cette formule est vraie dans M : $\neg(Qb \rightarrow Pb)$ est vraie dans M. En effet, Qb est vraie dans M, et Pb est fausse dans M. Donc, $Qb \rightarrow Pb$ est fausse dans M. Donc, $\neg(Qb \rightarrow Pb)$ est vraie dans M.

Commentaire. Cette instance est la seule instance vraie. $Qa \rightarrow Pa$ est vraie dans M, parce que Qa et Pa sont tous deux vraies. Donc, $\neg(Qa \rightarrow Pa)$ est fausse dans M. De même, $Qc \rightarrow Pc$ est vraie dans M, parce que Qc et Pc sont tous deux vraies. Donc, $\neg(Qc \rightarrow Pc)$ est fausse dans M.

Exercice 11.1 Langage des prédicats monadiques : traduction et vérité

Soit la situation suivante :

Il y a quatre individus, Amélie, Brice, Christian, Delphine.

Amélie et Delphine sont des filles ; Brice et Christian des garçons.

Amélie et Brice ont chacun un chat ; Christian et Delphine ont chacun un chien.

Amélie lit. Brice, Christian et Delphine mangent.

(Note : ce qui n'est pas précisé est faux ; par exemple, Amélie ne mange pas.)

A) Décrivez le modèle M correspondant à cette situation.

M est le modèle constitué du domaine D et de l'interprétation I tels que :

$D : \{ \text{Amélie, Brice, Christian, Delphine} \}$

$I(a) = \text{Amélie}$

$I(b) = \text{Brice}$

$I(c) = \text{Christian}$

$I(d) = \text{Delphine}$

$Fx : x$ est une fille

$I(F) = \{ \text{Amélie, Delphine} \}$

$Gx : x$ est un garçon

$I(G) = \{ \text{Brice, Christian} \}$

$Cx = x$ a un chat

$I(C) = \{ \text{Amélie, Brice} \}$

$Dx : x$ a un chien

$I(D) = \{ \text{Christian, Delphine} \}$

$Lx : x$ lit

$I(L) = \{ \text{Amélie} \}$

$Mx : x$ mange

$I(M) = \{ \text{Brice, Christian, Delphine} \}$

B) et C) Formalisez les phrases ci-dessous dans le langage des prédicats monadiques. Pour chacune des formules correspondantes, dites si elle est vraie ou fausse dans le modèle M en justifiant votre réponse.

1. Amélie mange ou lit.

$Ma \vee La$

Vraie dans M parce que La est vraie dans M (parce que $I(a)$ appartient à $I(L)$).

2. Si Brice mange, Christian lit. (Et non pas « dort », erreur dans l'énoncé.)

$Mb \rightarrow Lc$

Fausse dans M parce que Mb est vraie dans M et Lc est fausse dans M .

3. Si Brice et Christian mangent, alors Delphine ne lit pas.

$(Mb \wedge Mc) \rightarrow \neg Ld$

Vraie dans M parce que Mb et Mc sont vraies dans M , et $\neg Ld$ est vraie dans M (parce que Ld est fausse dans M).

4. Delphine a un chat ou un chien.

$Cd \vee Dd$

Vraie dans M parce que Dd est vraie dans M .

5. Tout le monde a un chat ou un chien.

$$\forall x(Cx \vee Dx)$$

Vraie dans M parce que toutes les instances de cette formule dans M sont vraies dans M :

$Ca \vee Da$ est vraie dans M parce que Ca est vraie dans M.

$Cb \vee Db$ est vraie dans M parce que Cb est vraie dans M.

$Cc \vee Dc$ est vraie dans M parce que Dc est vraie dans M.

$Cd \vee Dd$ est vraie dans M parce que Dd est vraie dans M.

6. Si quelqu'un lit, tout le monde mange.

$$\exists xLx \rightarrow \forall xMx$$

Note sur la formalisation : les parenthèses sont inutiles. En leur absence, les quantificateurs sont appliqués à la formule atomique qui les suit. Ce qui précède est donc équivalent à : $(\exists xLx) \rightarrow (\forall xMx)$.

Fausse dans M parce que $\exists xLx$ est vraie dans M et $\forall xMx$ est fausse dans M. $\exists xLx$ est vraie dans M parce qu'il y a au moins une instance vraie de cette formule dans M : La est vraie dans M. $\forall xMx$ est fausse dans M parce que toutes les instances de cette formule dans M ne sont pas vraies dans M : Ma est fausse dans M.

7. Si quelqu'un lit, quelqu'un mange.

$$\exists xLx \rightarrow \exists xMx$$

Vraie dans M parce que $\exists xLx$ et $\exists xMx$ sont vraies dans M. $\exists xLx$ est vraie parce que La est vraie dans M. $\exists xMx$ est vraie dans M parce que Mb est vraie dans M. (On pourrait aussi dire : parce que Mc est vraie dans M, ou parce que Md est vraie dans M.)

8. Tous ceux qui mangent ne lisent pas.

La phrase est ambiguë entre deux lectures.

$\forall x(Mx \rightarrow \neg Lx)$ Tous ceux qui mangent sont non-lecteurs.

$\neg \forall x(Mx \rightarrow Lx)$ Il est faux que tous ceux qui mangent lisent.

La première lecture, $\forall x(Mx \rightarrow \neg Lx)$, est vraie dans M parce que toutes ses instances sont vraies dans M :

$Ma \rightarrow \neg La$ est vraie dans M parce que Ma est fausse dans M.

$Mb \rightarrow \neg Lb$ est vraie dans M parce que $\neg Lb$ est vraie dans M.

$Mc \rightarrow \neg Lc$ est vraie dans M parce que $\neg Lc$ est vraie dans M.

$Md \rightarrow \neg Ld$ est vraie dans M parce que $\neg Ld$ est vraie dans M.

La seconde lecture, $\neg \forall x(Mx \rightarrow Lx)$, est vraie dans M parce que $\forall x(Mx \rightarrow Lx)$ est fausse dans M. En effet, toutes les instances de $\forall x(Mx \rightarrow Lx)$ ne sont pas vraies dans M : $Mb \rightarrow Lb$ est faux dans M parce que Mb est vraie dans M et Lb est fausse dans M.

Note : on pourrait proposer une autre formalisation pour la seconde lecture, à savoir $\exists x(Mx \wedge \neg Lx)$. Cette formule est certes logiquement équivalente à celle que nous avons donnée pour la seconde lecture. Toutefois, elle ne correspond pas exactement à la phrase française « Tous ceux qui mangent ne lisent pas », mais plutôt à « Quelqu'un mange et ne lit pas ».

9. Tous les garçons mangent.

$$\forall x(Gx \rightarrow Mx)$$

Vraie dans M parce que toutes ses instances sont vraies dans M :

$Ga \rightarrow Ma$ est vraie dans M parce que Ga est faux dans M.

$Gb \rightarrow Mb$ est vraie dans M parce que Mb est vrai dans M.

$Gc \rightarrow Mc$ est vraie dans M parce que Mb est vrai dans M.

$Gd \rightarrow Md$ est vraie dans M parce que Mb est faux dans M.

(ou parce que Md est vraie dans M.)

10. Aucune fille ne mange.

$$\neg\exists x(Fx \wedge Mx)$$

Fausse dans M parce que $\exists x(Fx \wedge Mx)$ est vraie dans M. $\exists x(Fx \wedge Mx)$ est vraie dans M parce que Fd et Md sont vrais dans M.

Note : une autre formalisation : $\forall x(Fx \rightarrow \neg Mx)$ (« Toutes les filles sont non-mangeuses ») est logiquement équivalente mais ne correspond pas exactement à la phrase française.

11. Toutes les filles ont un chat.

$$\forall x(Fx \rightarrow Cx)$$

Fausse dans M parce qu'il y a une instance fautive : $Fd \rightarrow Cd$ est fautive dans M, parce que Fd est vraie dans M et Cd est fautive dans M.

12. Si tous les garçons ont un chien, toutes les filles ont un chat.

$$\forall x(Gx \rightarrow Dx) \rightarrow \forall x(Fx \rightarrow Cx)$$

Note : inutile d'utiliser deux variables différentes ici (x et y), parce que les quantificateurs sont dans des sous-formules indépendantes.

Vraie dans M parce que $\forall x(Gx \rightarrow Dx)$ est fautive dans M. En effet, cette sous-formule a une instance fautive dans M : $Gb \rightarrow Db$ est fautive dans M parce que Gb est vraie dans M et Db est fautive dans M.

13. Ceux qui ont un chien mangent.

$$\forall x(Dx \rightarrow Mx)$$

Vraie dans M parce que toutes ses instances sont vraies dans M :

$$Da \rightarrow Ma \text{ vraie dans M parce que } Da \text{ est fautive dans M.}$$

$$Db \rightarrow Mb \text{ vraie dans M parce que } Db \text{ est fautive dans M.}$$

$$Dc \rightarrow Mc \text{ vraie dans M parce que } Mc \text{ est vraie dans M.}$$

$$Dd \rightarrow Md \text{ vraie dans M parce que } Md \text{ est vraie dans M.}$$

14. Ceux qui mangent ont un chien.

$$\forall x(Mx \rightarrow Dx)$$

Fausse dans M parce qu'elle a une instance fautive dans M. $Mb \rightarrow Db$ est fautive dans M parce que Mb est vrai dans M et Db est fautive dans M.

15. Tous les garçons ne lisent pas.

La phrase ne me semble pas ambiguë, ici. (La seconde lecture, « tous les garçons sont non-lecteurs », doit toutefois être possible dans certains contextes. NB : elle est vraie dans M.)

$$\neg\forall x(Gx \rightarrow Lx)$$

Vraie dans M parce que $\forall x(Gx \rightarrow Lx)$ est fautive dans M. Cette sous-formule a une instance fautive dans M : $Gb \rightarrow Lb$ est fautive dans M parce que Gb est vraie dans M et Lb est fautive dans M.

16. Certains garçons ne lisent pas.

$$\exists x(Gx \wedge \neg Lx)$$

Vrai dans M parce que la formule a au moins une instance vraie dans M : $Gb \wedge \neg Lb$ est vrai dans M, parce que Gb est vrai dans M et $\neg Lb$ est vrai dans M.

17. Si une fille lit, alors une fille mange.

$$\exists x(Fx \wedge Lx) \rightarrow \exists x(Fx \wedge Mx)$$

Note : inutile d'utiliser deux variables différentes ici (x et y), parce que les quantificateurs sont dans des sous-formules indépendantes.

Vraie dans M parce que $\exists x(Fx \wedge Mx)$ est vraie dans M. (En fait, l'antécédent et le conséquent sont tous deux vrais. Mais le simple fait que le *conséquent* soit vrai suffit à rendre l'impli-

cation vraie.) En effet, $\exists x(Fx \wedge Mx)$ a une instance vraie dans M : $Fd \wedge Md$ est vraie dans M, parce que Fd et Md sont tous deux vrais dans M.

18. Si une fille lit, alors elle mange. (Attention, cette traduction n'est pas évidente!)

Deux traductions possibles (équivalentes) :

$$\forall x((Fx \wedge Lx) \rightarrow Mx)$$

$$\forall x(Fx \rightarrow (Lx \rightarrow Mx))$$

C'est la seule façon de rendre cette phrase. Bien que « une fille lit » fasse penser à un quantificateur existentiel, il n'est pas possible de rendre cette phrase avec ce quantificateur. Si on rend par $\exists x(Fx \wedge Lx) \rightarrow \exists x(Fx \wedge Mx)$ (S'il existe une fille qui lit, alors il existe une fille qui mange), on perd l'idée que c'est la *même* personne qui lit et qui mange. On traduirait en fait la phrase (17). La traduction par $\exists x((Fx \wedge Lx) \rightarrow Mx)$ (il y a quelqu'un tel que si c'est une fille qui lit alors il/elle mange) n'est pas possible non plus, parce qu'elle est rendue vraie par un garçon : un garçon est tel que si c'est une fille qui mange, alors il lit. (Comme l'antécédent est faux des garçons, l'implication est vraie.) Dans ce cas, même si aucune fille qui lit mange, la formule serait vraie, alors que la phrase initiale serait fausse. On ne peut pas non plus traduire par $\exists x(Fx \wedge Lx \wedge Mx)$ (Une fille lit et mange) parce que la phrase initiale n'implique pas qu'il y a une fille qui lit, alors que cette formule le fait.

La phrase est en fait une quantification *universelle*. C'est qu'elle dit, ce que toute fille qui lit mange. D'où les traductions : $\forall x((Fx \wedge Lx) \rightarrow Mx)$, soit « Pour tout x , si x est une fille qui lit, alors x mange » ou en bref : « toute fille qui lit mange ». Et $\forall x(Fx \rightarrow (Lx \rightarrow Mx))$ (Pour tout x , si x est une fille alors si x lit x mange, soit : les filles, si elles lisent, mangent.) Faux dans M parce que toutes les instances ne sont pas vraies dans M. $(Fa \wedge La) \rightarrow Ma$ est fausse dans M parce que Fa et La sont vraies dans M, et Ma est fausse dans M. (De même, $Fa \rightarrow (La \rightarrow Ma)$ est fausse dans M ; Fa est vraie dans M, et $La \rightarrow Ma$ est fausse dans M, parce que La est vraie et Ma fausse.)

19. Tous ceux qui ont un chat lisent ou mangent.

$$\forall x(Cx \rightarrow (Lx \vee Mx))$$

Vraie dans M parce que toutes ses instances sont vraies :

$$Ca \rightarrow (La \vee Ma) \quad \text{est vraie dans M parce que } La \text{ (et donc } La \vee Ma) \text{ est vraie dans M.}$$

$$Cb \rightarrow (Lb \vee Mb) \quad \text{est vraie dans M parce que } Mb \text{ est vraie dans M.}$$

$$Cc \rightarrow (Lc \vee Mc) \quad \text{est vraie dans M parce que } Cc \text{ est fausse dans M. (ou parce que } Mc \text{ est vraie)}$$

$$Cd \rightarrow (Ld \vee Md) \quad \text{est vraie dans M parce que } Cd \text{ est fausse dans M. (ou parce que } Md \text{ est vraie)}$$

20. Si toutes les filles ont un chat ou mangent, alors tous les garçons ont un chien ou lisent.

$$\forall x(Fx \rightarrow (Cx \vee Mx)) \rightarrow \forall x(Gx \rightarrow (Dx \vee Lx))$$

Fausse dans M parce que $\forall x(Fx \rightarrow (Cx \vee Mx))$ est vraie dans M et $\forall x(Gx \rightarrow (Dx \vee Lx))$ est fausse dans M.

$\forall x(Fx \rightarrow (Cx \vee Mx))$ est vraie dans M parce que toutes ses instances sont vraies dans M :

$$Fa \rightarrow (Ca \vee Ma) \quad \text{est vraie dans M parce que } Ca \text{ (et donc } Ca \vee Ma) \text{ est vraie dans M.}$$

$$Fb \rightarrow (Cb \vee Mb) \quad \text{est vraie dans M parce que } Fb \text{ est fausse dans M. (ou parce que } Mb \text{ est vraie dans M)}$$

$$Fc \rightarrow (Cc \vee Mc) \quad \text{est vraie dans M parce que } Fc \text{ est fausse dans M. (ou parce que } Mc \text{ est vraie dans M)}$$

$$Fd \rightarrow (Cd \vee Md) \quad \text{est vraie dans M parce que } Md \text{ est vraie dans M.}$$

$\forall x(Gx \rightarrow (Dx \vee Lx))$ est fausse dans M parce que toutes ses instances ne sont pas vraies

dans $M : Gb \rightarrow (Db \vee Lb)$ est fausse dans M parce que Gb est vraie dans M , et $Db \vee Lb$ est fausse dans M , parce que Db et Lb sont fausses dans M .

Exercice 11.2 Arbres pour le langage des prédicats monadiques

A l'aide de la méthode des arbres, dites si les arguments suivants sont valides. S'ils ne le sont pas, donnez un contre-exemple (contre-modèle).

Note : pour la correction, j'ai numéroté les lignes des arbres et indiqué de quelle ligne les nouvelles lignes provenaient. Ces indications ne sont pas nécessaires en examen.

Rappel : il y a deux types de règles pour les quantificateurs :

1. Les règles dites *universelles* sont celles des formules en $V : \forall$ mais aussi $F : \exists$. Elles n'introduisent pas d'individu (sauf lorsqu'aucun individu n'a déjà été introduit, voir question 3 ci-dessous). Elles doivent être appliquées à tous les individus (a, b, c, \dots) qui ont été introduits dans la branche où on les applique. Elles ne doivent pas être cochées, parce que si des nouveaux individus sont introduits dans cette branche par la suite, il faut ré-appliquer la règle universelle pour ceux-ci.
2. Les règles dites *existentielles* sont celles des formules en $V : \exists$ mais aussi $F : \forall$. Elles introduisent un *nouvel* individu dans chaque branche où elles sont appliquées. On ne doit les appliquer qu'une fois : il faut donc les cocher. (Note : si une règle existentielle est située au-dessus de *deux ou plusieurs* branches, il faut l'appliquer une fois à *chaque* branche. Elle introduit un nouvel individu dans chaque branche.)

Ne confondez pas les *règles* universelles et existentielles avec les *quantificateurs* universels et existentiels. Les lignes en $F : \forall$ sont développées par une règle *existentielle*, même si \forall est le quantificateur universel. Et les lignes en $F : \exists$ sont développées par une règle *universelle*, même si \exists est le quantificateur existentiel.²

1. $\exists x \neg Px \models \neg \exists x Px$

$$\begin{array}{l}
 (1) V : \exists x \neg Px \quad \checkmark \\
 (2) F : \neg \exists x Px \quad \checkmark \\
 \quad | \\
 (3) V : \exists x Px \text{ par (2)} \quad \checkmark \\
 \quad | \\
 (4) V : \neg Pa \text{ par (1)} \quad \checkmark \\
 \quad | \\
 (5) F : Pa \text{ par (4)} \\
 \quad | \\
 (6) V : Pb \text{ par (3)} \\
 \quad \checkmark
 \end{array}$$

L'argument n'est pas valide. Contre-modèle : Pa faux Pb vrai.

Commentaire. A la ligne (6) on applique (3). (3) est une règle existentielle ($V : \exists$), elle requiert qu'on introduise un *nouvel* individu, d'où $V : Pb$ et non $V : Pa$.

²Si cela peut vous aider, souvenez-vous que $F : \forall x Px$ est équivalent à $V : \exists x \neg Px$ (il est faux que tous sont pauvres = il est vrai que quelqu'un n'est pas pauvre), et que $F : \exists x Px$ équivaut à $V : \forall x \neg Px$ (il est faux que quelqu'un est pauvre = tout le monde est non-pauvre).

2. $\neg\forall xPx \models \forall\neg xPx$

(1) $V : \neg\forall xPx$ ✓
(2) $F : \forall\neg xPx$ ✓
|
(3) $F : \forall xPx$ par (1) ✓
|
(4) $F : \neg Pa$ par (2) ✓
|
(5) $V : Pa$ par (4)
|
(6) $F : Pb$ par (3)
✓

L'argument n'est pas valide. Contre-modèle : Pa vrai Pb faux.

3. $\forall xPx \models \exists xPx$

(1) $V : \forall xPx$
(2) $F : \exists xPx$
|
(3) $V : Pa$ par (1)
|
(4) $F : Pa$ par (2)
×

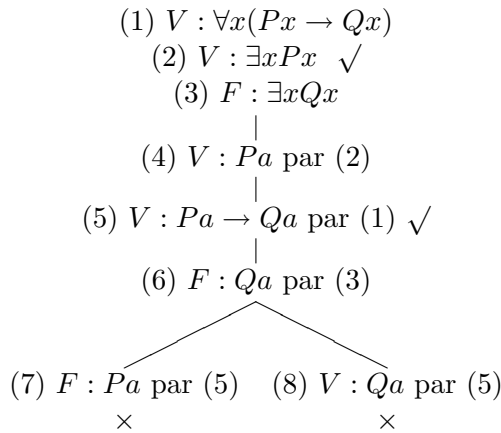
L'argument est valide.

Commentaire. Il n'y a pas de règle existentielle ($V : \exists$ ou $F : \forall$) à appliquer pour introduire un individu. Pour appliquer la règle universelle de (1), on doit introduire un individu a , d'où la ligne (3). Mais attention, il faut garder à l'esprit que la règle (1) est universelle; pour cette raison, on ne la coche pas, elle reste active si d'autres individus (b) apparaissent ensuite. La règle de (2) ($F : \exists$) est elle aussi universelle, on doit donc l'appliquer à tous les individus introduits. Il n'y en a qu'un, a , d'où la ligne (4). On ne coche pas (2) parce que c'est une règle universelle, qui reste active. La branche se ferme finalement, et l'arbre avec, puisqu'elle contient une contradiction ($V : Pa$ et $F : Pa$).

4. $\exists xPx \wedge \exists yQy \models \exists x(Px \wedge Qx)$

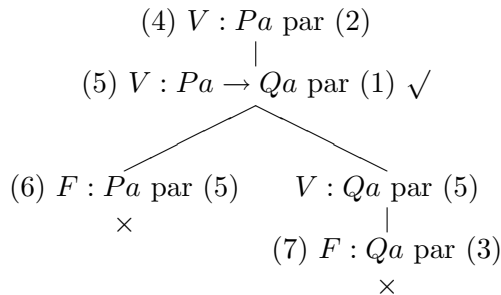
Note : on aurait pu utiliser x au lieu de y dans la prémisse, les deux quantificateurs étant

8. $\forall x(Px \rightarrow Qx), \exists xPx \models \exists xQx$

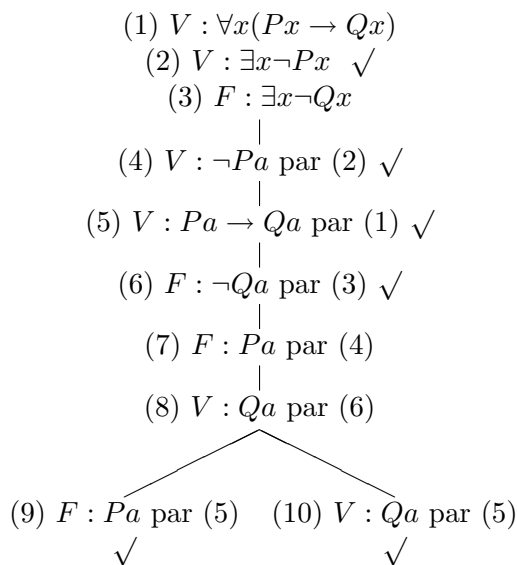


L'argument est valide. (C'est un équivalent, en logique des prédicats, du *modus ponens* de la logique propositionnelle.)

Commentaire. (1) et (3) sont des règles universelles ; (2) est une règle existentielle : il faut développer (2) d'abord. Aux lignes (5) et (6), on applique les universelles (1) et (3). Cela dit, l'application de (1) nous a donné une règle propositionnelle (5), qu'on peut décider d'appliquer immédiatement. (Ce n'est pas une bonne idée, parce qu'elle ouvre deux branches.) Cela donnerait :



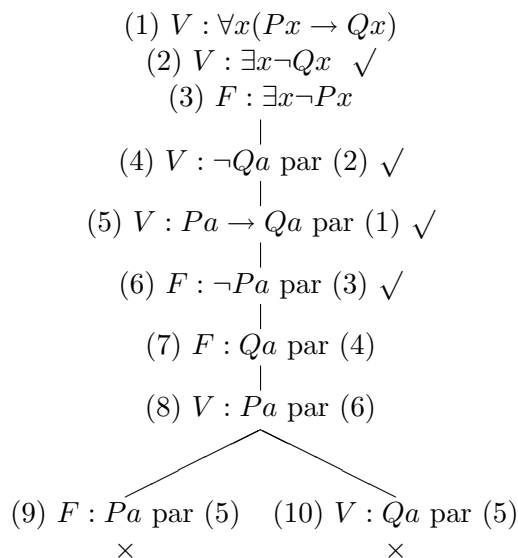
9. $\forall x(Px \rightarrow Qx), \exists x\neg Px \models \exists x\neg Qx$



L'argument n'est pas valide. Contre-exemple Pa faux, Qa vrai. (Les deux branches donnent le même contre-exemple. L'argument est un équivalent, en logique des prédicats, du sophisme de la négation de l'antécédent en logique propositionnelle.)

Commentaire. Je suis l'ordre canonique. D'abord les règles propositionnelles, il n'y en a pas. Puis les règles existentielles (2, qui donne 4), puis les universelles (1 et 3, qui donnent 5 et 6). L'arbre n'est pas fermé, on recommence. Les règles propositionnelles : trois sont apparues (4, 5 et 6, qui donnent le reste de l'arbre). Il n'y a pas de nouvelle existentielle. Pas de nouvelle règle universelle, ni de nouveaux individu auxquels appliquer les anciennes. L'arbre est donc achevé.

10. $\forall x(Px \rightarrow Qx), \exists x\neg Qx \models \exists x\neg Px$



L'argument est valide. (C'est un équivalent, en logique des prédicats, du *modus tollens* de la logique propositionnelle.)

