# PH 203A - Corrigés des exercices 7.1 à 7.3 (interprétations et arbres en calcul des prédicats)

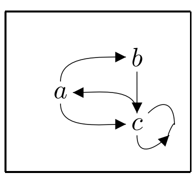
## 1 Sémantique du calcul des prédicats

### 1.1 Questions

*Est-ce que Christine voit Antoine?* Oui. (Commentaire: dans cette interprétation, la paire $< c, a >$ appartient au prédicat P. Autrement dit, la formule P$xy$ est vraie pour $x = c$ et $y = a$. Comme P$xy$ signifie que $x$ voit $y$, on dit que Christine voit Antoine.)
*Est-ce que Christine voit Béatrice?* Non. (Commentaire: dans cette interprétation, la paire $< c, b >$ n'appartient pas au prédicat P. La paire $< b, c >$ y figure, mais elle signifie que Béatrice voit Christine et non l'inverse.

### 1.2 Diagramme de Venn

Voici le diagramme correspondant à cette interprétation:




### 1.3 Propositions vraies et fausses dans cette interprétation.

#### 1.3.1 P$ba$?

Faux. ($< b, a >$ n'appartient pas à P; il n'y a pas de flèche de $b$ vers $a$.)

#### 1.3.2 P$cb \vee$ P$cc$?

Vrai. (On procède comme pour calculer une ligne d'un tableau de vérité. a) quelle est la valeur de P$cb$? Faux. b) quelle est la valeur de P$cc$? Vrai. c) Quelle est la valeur de F $\vee$ V? Vrai.)

### 1.3.3 $\mathbf{P}ba \vee \mathbf{P}cc$?

Vrai. (P$ba$ est faux, donc l'implication est vraie.)

### 1.3.4 $(\mathbf{P}ab \supset (\mathbf{P}ba \vee \neg\mathbf{P}cb)) \supset \mathbf{P}bc)$?

Vrai.
Version longue:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (P$ab$ | $\supset$ | (P$ba$ | $\vee$ | $\neg$P$cb$)) | $\supset$ | P$bc$) |
| V | | F | | V | | V |
| | | | V | | | |
| | V | | | | | |
| | | | | | V | |

Version courte: P$bc$ est vrai, donc l'implication est vraie, quelque soit la valeur de vérité de l'antécédent.

### 1.3.5 $\exists\mathbf{P}xx$?

Vrai. ("Y a-t-il quelqu'un qui se voit lui-même?" Oui, Christine. En termes formels: la proposition $\exists$P$xx$ est vraie si et seulement si il y a *une* valeur possible de $x$ pour laquelle la proposition est vraie. Comme pour $c$, il est vrai que P$cc$, la proposition est vraie.)

### 1.3.6 $\forall\mathbf{P}xc$?

Vrai. ("Est-ce que tout le monde voit Christine?" Oui. En termes formels: la proposition $\forall$P$xc$ est vraie si et seulement si pour *chacune* des valeurs possibles de $x$, la formule $\forall$P$xc$ est vraie.)

### 1.3.7 $\forall\mathbf{P}ax$?

Faux. (La proposition requiert que $a$ ait la relation P envers tous les individus. $a$ l'a envers $b$ et $c$, mais pas envers lui-même.)

### 1.3.8 $\exists x\forall y\mathbf{P}yx$?

Vrai. (La proposition est vraie ssi on peut trouver un $x$ au moins, envers qui tous les $y$ possibles ont la relation P. C'est le cas de $c$.)

### 1.3.9 $\exists x\forall y\mathbf{P}xy$?

Faux. (Il faudrait un $x$ qui ait la relation P envers tous les $y$ possibles. $a$ a $b$ et $c$ mais pas lui-même. $b$ n'a que $c$, et $c$ n'a que $b$ et lui-même.)

### 1.3.10 $\forall x(\mathbf{P}xx \supset \exists y \neg \mathbf{P}xy)$?

Vrai. (La proposition dit qu'une certaine implication est vraie de tous les individus (tous les $x$). Or pour $x = a$ et $x = b$, l'antécédent de l'implication (P$xx$) est faux. L'implication est donc vraie dans ces cas. ( F $\supset$ V = V, dans un tableau de vérité). Dans le cas de $c$, l'antécédent P$cc$ est vrai. Le conséquent, $\exists y \neg$P$cy$, est vrai s'il existe un individu $y$ envers lequel $c$ n'a pas la relation P. C'est le cas de $b$ (P$cb$ est faux dans l'interprétation). L'antécédent et le conséquent sont vrais, donc l'implication est vraie pour $c$ également: la proposition entière est vraie.

## 2 Arbres pour les modèles

**Rappel de la méthode :**

Règle $\exists$ | Règle $\neg\forall$

$$\begin{array}{ccc} & \exists x \mathrm{P}x & \\ \mathrm{P}a & \mathrm{P}b & \mathrm{P}c \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \neg\forall x \mathrm{P}x & \\ \neg\mathrm{P}a & \neg\mathrm{P}b & \neg\mathrm{P}c \end{array}$$

Où $c$ est *une constante nouvelle qui n'a pas été utilisée jusqu'à présent dans cette branche.*

Règle $\forall$ | Règle $\neg\exists$

$$\begin{array}{c} \forall x \mathrm{P}x \\ | \\ \mathrm{P}a \\ \mathrm{P}b \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\exists x \mathrm{P}x \\ | \\ \neg\mathrm{P}a \\ \neg\mathrm{P}b \end{array}$$

Où $a$ et $b$ sont *toutes les constantes de cette branche.*

Il faut donc, non seulement appliquer ces règles à toutes les constantes déjà introduites, mais les appliquer à nouveau si de nouvelles constantes sont introduites plus bas dans l'arbre. (Ce point est repris dans la question 2.3, plus bas.)

### 2.1 $\exists x \forall y \mathbf{R}xy$

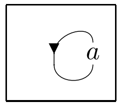
$$\begin{array}{lcl} 1. & \exists x \forall y \mathrm{R}xy & \\ & | & \\ 2. & \forall y \mathrm{R}ay & \exists(1) \\ & | & \\ 3. & \mathrm{R}aa & \forall(2) \\ & \surd & \end{array}$$

**Un modèle de la proposition** est:

| | |
|---|---|
| Domaine: | $\{a\}$ |
| Constante: | "$a$" $= a$ |
| Prédicat: | $\mathrm{R} = \{< a, a >\}$ |

(Notez que l'arbre donne *un* modèle, le plus simple, et non *tous* les modèles, comme c'était le cas dans le calcul des propositions. Il y a en fait une infinité de modèles: par exemple, avec trois individus $a$, $b$, et $c$, où $a$ a la relation R vers les deux autres et lui-même (R$aa$, R$ab$, R$ac$). Ou encore, le domaine peut être celui des entiers naturels $(0, 1, 2, ...)$, et R la relation $\leq$: dans ce cas 0 est l'individu qui a la relation R vers tous les autres individus du domaine et lui-même.)

**Diagramme de Venn:**




Remarque: le sens de la proposition est (par exemple) : il y a quelqu'un qui voit tout le monde.

**Commentaire de l'arbre**: on applique d'abord les règles qui ajoutent des constantes ($\exists$ et $\neg\forall$) puis les règles qui n'en ajoutent pas ($\forall$ et $\neg\exists$). On introduit ainsi une constante à la ligne 2. A la ligne 3, il faut appliquer l'universel ($\forall y$) à toutes les constantes de la branche. Il n'y en a qu'une: $a$.

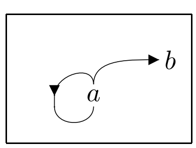
## 2.2 $\exists x\forall y\mathbf{R}xy$ & $\exists x\forall y\neg\mathbf{R}xy$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\exists x\forall y \mathrm{R}xy \;\&\; \exists x\forall y\neg \mathrm{R}xy$ | | |
| 2. | $\exists x\forall y \mathrm{R}xy$ | | &(1) |
| 3. | $\exists x\forall y\neg \mathrm{R}xy$ | | &(1) |
| 4. | $\forall y \mathrm{R}ay$ | | $\exists$(2) |
| 5. | $\forall y\neg \mathrm{R}ay$ | $\forall y\neg \mathrm{R}ay$ | $\exists$(3) |
| 6. | $\mathrm{R}aa$ | $\mathrm{R}aa$ | $\forall$(4) |
| 7. | | $\mathrm{R}ab$ | $\forall$(4) |
| 8. | $\neg \mathrm{R}aa$ | $\neg \mathrm{R}ba$ | $\forall$(5) |
| 9. | $\times$ | $\neg \mathrm{R}bb$ | $\forall$(5) |
| | | $\surd$ | |

Un **modèle de la proposition** est:

| | |
|---|---|
| Domaine: | $\{a, b\}$ |
| Constantes: | "$a$" $= a$ |
| | "$b$" $= b$ |
| Prédicat: | $\mathrm{R} = \{< a, a >, < a, b >\}$ |

**Diagramme de Venn:**



Remarque: le sens de la proposition est : il y a quelqu'un qui voit tout le monde et il y a quelqu'un qui ne voit personne. (Dans le modèle trouvé, $a$ voit tout le monde, et $b$ personne.)

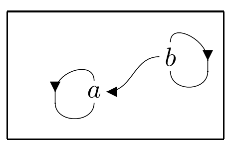
**Commentaire de l'arbre**: on applique d'abord les règles du calcul propositionnel, ici celle de & à la ligne 1. Ensuite les règles qui ajoutent des constantes: $\exists$ à la ligne 2, et à la ligne 3.
(Remarque: après avoir obtenu la ligne 4, on pourrait être tenté de continuer à développer la formule obtenue, en appliquant $\forall$. Ce serait une perte de temps et une source possible d'erreur, parce que le développement de la ligne 3 amènera plus tard une nouvelle constante, $b$, à laquelle il faudra penser à appliquer le $\forall$ de la ligne 4. **Bref, appliquez toujours strictement la règle: d'abord $\exists$ (et $\neg\forall$), ensuite $\forall$ (et $\neg\exists$).**)
Lorsqu'on applique $\exists$, il faut ouvrir une branche pour chaque constante déjà utilisée, et rajouter une constante. Lorsqu'on l'applique à la ligne 2 pour obtenir la ligne 4, aucune constante n'a déjà été introduite: on ouvre donc une seule branche, en introduisant $a$. Lorsqu'on l'applique à la ligne 3 pour obtenir la ligne 5, on a déjà introduit $a$: il faut donc ouvrir deux branches. Dans la première, le $x$ de la ligne 3 est remplacé par $a$ (constante déjà présente). Dans la seconde, le $x$ de la ligne 3 est remplacé par $b$ (nouvelle constante).
Finalement, dans chaque branche, on instancie les $\forall$ des lignes 3 et 5 pour toutes les constantes existantes sur la branche. La première branche ne contient qu'une constante, $a$, il suffit donc, pour la ligne 4, de remplacer $x$ par $a$, et pour la ligne 5, de remplacer $x$ par $a$. La seconde branche contient deux constantes. Quand on applique la règle $\forall$ à la ligne 4, il faut remplacer $y$ d'abord par $a$ (ce qui donne la ligne 6), puis par $b$ (ligne 7). Même chose pour obtenir les lignes 8 et 9 à partir de la ligne 5.

## 2.3 $(\forall x\mathbf{R}xx \;\&\; \exists x\forall y\mathbf{R}xy) \;\&\; \exists x\exists y\neg\mathbf{R}xy$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $(\forall x\mathrm{R}xx \;\&\; \exists x\forall y\mathrm{R}xy) \;\&\; \exists x\exists y\neg\mathrm{R}xy$ | | | | | |
| 2. | $\forall x\mathrm{R}xx \;\&\; \exists x\forall y\mathrm{R}xy$ | | | | | &(1) |
| 3. | $\exists x\exists y\neg\mathrm{R}xy$ | | | | | &(1) |
| 4. | $\forall x\mathrm{R}xx$ | | | | | &(2) |
| 5. | $\exists x\forall y\mathrm{R}xy$ | | | | | &(2) |
| 6. | $\exists y\neg\mathrm{R}ay$ | | | | | $\exists$(3) |
| 7. | $\forall y\mathrm{R}ay$ | | $\forall y\mathrm{R}by$ | | | $\exists$(5) |
| 8. | $\neg\mathrm{R}aa$ | $\neg\mathrm{R}ab$ | $\neg\mathrm{R}aa$ | $\neg\mathrm{R}ab$ | $\neg\mathrm{R}ac$ | $\exists$(6) |
| 9. | $\mathrm{R}aa$ | $\mathrm{R}aa$ | $\mathrm{R}aa$ | $\mathrm{R}aa$ | $\mathrm{R}aa$ | $\forall$(4) |
| 10. | $\times$ | $\mathrm{R}bb$ | $\times$ | $\mathrm{R}bb$ | $\mathrm{R}bb$ | $\forall$(4) |
| 11. | | | | | $\mathrm{R}cc$ | $\forall$(4) |
| 12. | | $\mathrm{R}aa$ | | $\mathrm{R}ba$ | $\mathrm{R}ba$ | $\forall$(7) |
| 13. | | $\mathrm{R}ab$ | | $\mathrm{R}bb$ | $\mathrm{R}bb$ | $\forall$(7) |
| 14. | | $\times$ | | $\surd$ | $\mathrm{R}bc$ | $\forall$(7) |
| | | | | $\uparrow$ | $\surd$ | |

Un **modèle de la proposition** (correspondant à la branche indiquée par une flèche) est:

| | |
|---|---|
| Domaine: | $\{a, b\}$ |
| Constantes: | "$a$" $= a$ |
| | "$b$" $= b$ |
| Prédicat: | $\mathrm{R} = \{< a, a >, < b, b >, < b, a >\}$ |

**Diagramme de Venn:** 


Remarque. Le sens de la proposition est : chacun se voit lui-même, une personne voit tout le monde, et il y a quelqu'un qui ne voit pas quelqu'un d'autre. (Dans le modèle trouvé, $a$ et $b$ se voient eux-mêmes, $a$ voit tout le monde, et $a$ ne voit pas $b$.)

**Commentaire de l'arbre:** L'ordre général du développement est simple: on applique la règle & (lignes 1 à 5), puis $\exists$ (lignes 6 à 8), puis $\forall$ (lignes 9 à 14). La première application de $\exists$ donne une première constante, $a$, et le résultat

(ligne 6) est encore une proposition existentielle.
(Note: A ce moment on peut appliquer à nouveau $\exists$ à cette proposition; il ne faudra pas oublier de s'occuper ensuite de l'existentielle de la ligne 5. Cela donne un arbre légèrement différent de celui ci-dessus.)
Dans l'arbre ci-dessus, on a gardé le résultat de la ligne 6 de côté, pour applique $\exists$ d'abord à 5 (introduction de $b$, ligne 7). Il faut ensuite appliquer $\exists$ à 6, dans chacune des branches. La première ne contient qu'une constante, $a$: on l'utilise dans la sous-branche de gauche, et on en introduit une nouvelle dans la sous-branche de droite. De l'autre côté, on a déjà deux constantes ($a$, $b$): il faut donc ouvrir une sous-branche pour chacune, puis une sous-branche pour une nouvelle constante ($c$).
On vérifie chaque branche: toutes les propositions existentielles ont été instanciées (=la règle $\exists$ leur a été appliquée). On passe donc aux universelles. Il y en a deux pour chaque branche: lignes 4 et 7. Il faut alors, dans chaque branche, instancier ces propositions pour chaque constante de la branche: $a$ dans la première, $a$ et $b$ dans les seconde, troisième et quatrième, et $a$, $b$ et $c$ dans la cinquième.
Les trois premières branches décrivent des situations impossibles: $\mathrm{R}aa$ et $\neg\mathrm{R}aa$ dans la première et la troisième, $\neg\mathrm{R}ab$ et $\mathrm{R}ab$ dans la seconde. On doit donc les fermer.
(Note: dans la seconde branche, on aurait pu appliquer $\forall$ à la ligne 7 avant de l'appliquer à la ligne 3, pour fermer la branche plus vite, mais cela rend la présentation de l'arbre moins lisible.)

**Comment vérifier qu'une branche est terminée.** Pour savoir si une branche est fermée, il faut vérifier qu'on a appliqué toutes les règles autant de fois qu'il le fallait. Il faut bien distinguer:
– La règle $\exists$ (et $\neg\forall$): elle ne doit être appliquée qu'une fois. Lorsqu'on l'applique, on ouvre une sous-branche pour chaque constante déjà apparue dans la branche, et on en rajoute une. **Attention!** On n'applique $\exists$ *qu'une fois par ligne*. Dans cet arbre, on l'applique à la ligne 5 pour donner les deux branches de la ligne 7. A ce moment-là, seul $a$ est introduit, il suffit donc de rajouter une branche pour $b$. Mais dans la sous-branche de droite, on introduit plus tard la constante $c$ (ligne 8). Est-ce que cela signifie que, dans cette sous-branche, on doit à nouveau appliquer la règle *exists* de la ligne 3, pour l'appliquer à $c$ aussi? Non. Cette réapplication de la règle à des constantes apparues ultérieurement ne vaut que pour $\forall$. (En fait, si on la réappliquait, une proposition comme $\exists x\exists y\mathrm{R}xy$ aurait un arbre infini.)
– La règle $\forall$ (et $\neg\exists$): chaque proposition en $\forall x$ doit être instanciée pour *toutes* les constantes de la branche. (Par exemple: pour $\forall x\mathrm{R}xx$, si les constantes d'une branche sont $a$, $b$, et $c$, on doit ajouter à la branche les trois propositions obtenues en remplaçant $x$ par chaque constante: $\mathrm{R}aa$, $\mathrm{R}bb$ et $Rcc$ (voir la branche de droite de l'arbre, lignes 9-11). Cela vaut *y compris pour les constantes qui peuvent apparaître après que la règle a été appliquée une fois.* Par exemple, dans la

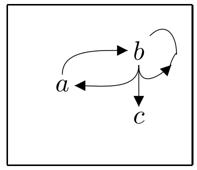
partie droite de cet arbre, figure la proposition $\forall y\mathrm{R}by$ (ligne 7). Avant de déclarer qu'une sous-branche est terminée, par exemple celle de droite, il faut vérifier que l'on a une proposition $\mathrm{R}b\ldots$ pour toutes les constantes de chaque sous-branche. Dans la sous-branche de droite, où figurent $a$, $b$, et $c$, il faut donc vérifier qu'on a $\mathrm{R}ba$, $\mathrm{R}bb$ et $\mathrm{R}bc$. Dans la sous-branche centrale, où ne figurent que $a$ et $b$, il suffit qu'il y ait $\mathrm{R}ba$, $\mathrm{R}bb$.
Cela peut conduire à appliquer *à plusieurs reprises* la règle $\forall$. (Cela arrive en fait à chaque fois que l'on a des propositions de la forme $\forall x\exists y$.)

### 2.4 $(\exists x\forall y\mathbf{R}xy \mathbin{\&} \exists x\forall y\neg\mathbf{R}xy) \mathbin{\&} \exists x(\neg\mathbf{R}xx \mathbin{\&} \exists y\mathbf{R}xy)$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $(\exists x\forall y\mathrm{R}xy \mathbin{\&} \exists x\forall y\neg\mathrm{R}xy) \mathbin{\&} \exists x(\neg\mathrm{R}xx \mathbin{\&} \exists y\mathrm{R}xy)$ | | | | | | | |
| 2. | $\exists x\forall y\mathrm{R}xy \mathbin{\&} \exists x\forall y\neg\mathrm{R}xy$ | | | | | | | &(1) |
| 3. | $\exists x(\neg\mathrm{R}xx \mathbin{\&} \exists y\mathrm{R}xy)$ | | | | | | | &(1) |
| 4. | $\exists x\forall y\mathrm{R}xy$ | | | | | | | &(2) |
| 5. | $\exists x\forall y\neg\mathrm{R}xy$ | | | | | | | &(2) |
| 6. | $\neg\mathrm{R}aa \mathbin{\&} \exists y\mathrm{R}ay$ | | | | | | | $\exists$(3) |
| 7. | $\neg\mathrm{R}aa$ | | | | | | | &(6) |
| 8. | $\exists\mathrm{R}ay$ | | | | | | | &(6) |
| 9. | $\mathrm{R}aa$ | | | $\mathrm{R}ab$ | | | | $\exists$(8) |
| 10. | $\times$ | $\forall y\mathrm{R}ay$ | | | $\forall y\mathrm{R}by$ | | $\forall y\mathrm{R}cy$ | $\exists$(4) |
| 11. | | $\mathrm{R}aa$ | $\forall$(10) | $\forall y\neg\mathrm{R}ay$ | $\forall y\neg\mathrm{R}by$ | $\forall y\neg\mathrm{R}cy$ | $\ldots$ | $\exists$(5) |
| | | $\times$ | | | | | | |
| 12. | | | | $\ldots$ | $\mathrm{R}ba$ | $\mathrm{R}ba$ | | $\forall$(10) |
| 13. | | | | | $\ldots$ | $\mathrm{R}bb$ | | $\forall$(10) |
| 14. | | | | | | $\mathrm{R}bc$ | | $\forall$(10) |
| 15. | | | | $\ldots$ | $\neg\mathrm{R}ba$ | $\neg\mathrm{R}ca$ | | $\forall$(11) |
| 16. | | | | $\neg\mathrm{R}ab$ | $\ldots$ | $\neg\mathrm{R}cb$ | | $\forall$(11) |
| 17. | | | | $\times$ | $\times$ | $\neg\mathrm{R}cc$ | | $\forall$(11) |
| | | | | | | $\surd$ | | |
| | | | | | | $\uparrow$ | | |

Un **modèle de la proposition** (correspondant à la branche indiquée par une flèche) est:

| | |
|---|---|
| Domaine: | $\{a, b\}$ |
| Constantes: | "$a$" $= a$ |
| | "$b$" $= b$ |
| | "$c$" $= c$ |
| Prédicat: | $\mathrm{R} = \{<a,b>, <b,a>, <b,b>, <b,c>\}$ |

**Diagramme de Venn:** 


Remarque. Le sens de la proposition est : (Quelqu'un voit tout le monde et quelqu'un ne voit personne) et (il y a quelqu'un qui ne se voit pas, mais qui voit quelqu'un). (Dans le modèle trouvé, $a$ ne se voit pas mais voit quelqu'un, $b$ voit tout le monde, et $c$ personne.)

**Commentaire de l'arbre:** Cet arbre demande un peu de stratégie. Tout d'abord, un rappel: **quand il s'agit de trouver un modèle, on n'a pas à développer l'arbre entier.** Il suffit de s'arrêter à la première branche ouverte, comme on l'a fait ici.
(Certaines propositions ont des modèles finis, qu'on peut trouver par les arbres, mais des arbres infinis. Essayez par exemple $\forall x \exists y \mathrm{R}xy$. On trouve facilement un modèle: Domaine: $\{a\}$, avec R=$\{< a, a >\}$. Mais l'arbre est interminable, parce que chaque fois qu'on introduit une constante il faut réappliquer la règle $\forall$.)
Maintenant, l'arbre. Jusqu'à la ligne 8 le développement est automatique.
A la ligne 9, on aurait pu instancier $\exists x$ des lignes 4 ou 5. Mais on voit que s'il on instancie la ligne 8, on peut obtenir deux branches dont l'une se ferme immédiatement ($\neg \mathrm{R}aa$ et $\mathrm{R}aa$).
A la ligne 10, on applique $\exists$ à la ligne 4.
Avant d'appliquer le dernier $\exists$ (ligne 5), on remarque que la branche de gauche, ligne 10, finira par se fermer. En effet, la proposition $\forall y \mathrm{R}ay$ devra être instanciée, entre autres, en $\mathrm{R}aa$, et ce dans toutes les sous-branches éventuelles de cette branche. Or $\mathrm{R}aa$ entre en contradiction avec $\neg \mathrm{R}aa$ qu'on a déjà à la ligne 7. On peut donc tout de suite appliquer $\forall(10)$ ici pour fermer cette branche.
A la ligne 11, on applique $\exists$ à la ligne 5. La première branche sous $\forall y \mathrm{R}ay$ vient d'être fermée. On développe donc la deuxième branche, sous $\forall y \mathrm{R}by$. Il vaut mieux attendre de voir si elle se ferme avant de développer la troisième (qui s'avère finalement inutile).
Aux lignes 12-14, on instancie $\forall y \mathrm{R}by$ de la ligne 10.
Aux lignes 15-17, on instancie les $\forall y \neg \mathrm{R}ay$, $\forall y \neg \mathrm{R}by$ et $\forall y \neg \mathrm{R}cy$ de la ligne 11.
On peut voir d'avance que dans les deux premières sous-branche qui partent de la ligne 11, on aura des contradictions. Dans la première, $\forall y \neg \mathrm{R}ay$ (ligne 11) donnera $\neg \mathrm{R}ab$, qui contredit $\mathrm{R}ab$ (ligne 9). Dans la seconde, $\forall y \mathrm{R}by$ ("$b$ voit tout le monde") et $\forall y \neg \mathrm{R}by$ ("$b$ ne voit personne") doivent aboutir à une contradiction: $\mathrm{R}ba$ et $\neg \mathrm{R}ba$, ou encore $\mathrm{R}bb$ et $\neg \mathrm{R}bb$.
La troisième branche est la bonne. Tous les quantificateurs existentiels ($\exists$), à savoir ceux des lignes 3, 8, 4, et 5, on été instanciés. (Chacun a introduit une constante: $a$, $b$, $c$, et $d$ – cette dernière aurait été introduite dans la partie non développée de l'arbre.) Tous les quantificateurs universels ($\forall$), à savoir ceux des lignes 10 et 11, ont été instanciés pour toutes les constantes de la branche ($a$, $b$,

$c$). (La constante $d$ n'est pas utilisée dans cette branche.)

Pour ceux qui auraient développé l'arbre entier: je ne donne pas ici la partie manquante, mais en bref: à la ligne 11, on instancie $\exists$ de la ligne (5). Cela donne quatre branches, en $a$, $b$, $c$, et $d$, respectivement. Les branches $a$ et $c$ se ferment, pour les mêmes raisons que les branches $a$ et $b$ de la ligne 11 dans la partie qui a été développée ici. Les branches $b$ et $d$ sont viables. La branche $b$ donne exactement le modèle qu'on a trouvé ci-dessus, à ceci près que $b$ et $c$ sont inversés. La branche $d$ donne un modèle dans lequel 1) $c$ voit tout le monde, 2) $d$ ne voit personne, et 3) $a$ voit $b$ mais ne se voit pas lui-même. Autrement dit R=$\{< a, b >, < c, a >< c, b >< c, c >< c, d >\}$.

## 3 Arbres pour les tautologies

La méthode des arbres pour vérifier des tautologies ou des arguments valides en calcul des prédicats est plus simple que celle qui permet de trouver des modèles. Lorsqu'on applique les règles $\exists$ et $\neg\forall$, on n'ouvre qu'une branche, dans laquelle on introduit une nouvelle constante. Notez que, comme en calcul propositionnel, 1) pour vérifier une tautologie on vérifie que l'arbre de sa *négation* se ferme. 2) Pour vérifier un argument, on aligne ses prémisses, et la négation de la conclusion, et on vérifie que l'arbre qui en résulte se ferme.

**Rappel de la méthode :**

Seules les règles $\exists$ et $\neg\forall$ sont modifiées:

| Règle $\exists$ | Règle $\neg\forall$ |
|---|---|
| $\exists x \mathrm{P}x$ | $\neg\forall x \mathrm{P}x$ |
| $\vert$ | $\vert$ |
| $\mathrm{P}c$ | $\neg\mathrm{P}c$ |

Où $c$ est *une constante nouvelle qui n'a pas été utilisée jusqu'à présent dans cette branche.*

Il n'y a plus d'embranchement dû au quantificateurs: les arbres sont plus simples. Les seuls embranchements qu'ils ont sont ceux des connecteurs propositionnels comme $\vee$.

Les autres règles ($\forall$ et $\neg$ $\exists$) ne sont pas changées.

### 3.1 $\forall x(\mathbf{R}xx \supset \exists y\mathbf{R}xy)$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(\mathrm{R}xx \supset \exists y\mathrm{R}xy)$ | |
| 2. | $\neg(\mathrm{R}aa \supset \exists y\mathrm{R}ay)$ | $\neg\forall(1)$ |
| 3. | $\mathrm{R}aa$ | $\neg\supset(2)$ |
| 4. | $\exists y\mathrm{R}ay$ | $\neg\supset(2)$ |
| 5. | $\neg\mathrm{R}aa$ | $\neg\exists(4)$ |
| | $\times$ | |

L'arbre est fermé. La proposition est donc une tautologie.

Sens: "Si quelqu'un se voit lui-même, alors il y a quelqu'un qu'il voit." Ou, si l'on veut rendre la quantification universelle plus explicite encore: "Il est vrai de tout le monde que, s'il se voit lui-même, alors il y a quelqu'un qu'il voit."

**Commentaire de l'arbre.** A la ligne (2), on applique la règle $\neg\forall$, qui introduit une nouvelle constante. (Comme il n'y a pas encore de constante, la version 'tautologie' de cette règle ne diffère pas ici de sa versions 'modèle'.) Les ligne (3) et (4) correspondent à l'application de la règle $\neg\supset$, du calcul propositionnel. A la ligne (5), on applique la règle $\neg\exists$, qui doit être instanciée pour toutes les constantes utilisées. Il n'y en a qu'une: $a$.
Cette question permet de rappeler que la règle $\neg\forall$ marche comme la règle $\exists$, à ceci près qu'on doit ajouter une négation au résultat, et non comme la règle $\forall$. Inversement, la règle $\neg\forall$ marche comme la règle $\exists$, à la négation près là aussi.

### 3.2 $\exists x\forall y\mathbf{R}xy \supset \forall y\exists x\mathbf{R}xy$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg(\exists x\forall y\mathrm{R}xy \supset \forall y\exists x\mathrm{R}xy)$ | |
| 2. | $\exists x\forall y\mathrm{R}xy$ | $\neg\supset(1)$ |
| 3. | $\neg\forall y\exists x\mathrm{R}xy$ | $\neg\supset(1)$ |
| 4. | $\forall y\mathrm{R}ay$ | $\exists(2)$ |
| 5. | $\neg\exists x\mathrm{R}xb$ | $\neg\forall(3)$ |
| 6. | $\mathrm{R}aa$ | $\forall(4)$ |
| 7. | $\mathrm{R}ab$ | $\forall(4)$ |
| 8. | $\neg\mathrm{R}ab$ | $\neg\exists(5)$ |
| 9. | $\neg\mathrm{R}bb$ | $\neg\exists(5)$ |
| | $\times$ | |

L'arbre est fermé. La proposition est donc une tautologie.

Sens: “S’il y a quelqu’un qui voit tout le monde, alors chacun est vu par quelqu’un.”

**Commentaire de l’arbre.** Le développement est mécanique. On applique d’abord les règles $\exists$ et $\neg\forall$, qui introduisent des nouvelles constantes. Il s’agit ici de leur version simplifiée: au lieu d’ouvrir plusieurs branches (à la ligne 5), on se contente d’introduire une nouvelle constante. Une fois parvenu à la ligne 5, il faut appliquer les règles $\forall$ et $\neg\exists$, qui doivent être instanciés pour chaque constante déjà utilisée (ici $a$ et $b$). La seule difficulté consiste à bien placer les négations et à ne pas confondre les règles.
On peut raccourcir l’arbre, en omettant les lignes 6 et 9, qui ne sont pas utiles. Le but est de montrer que la branche se ferme, et il suffit d’obtenir les lignes 7 et 8 pour cela, puisqu’elles donnent la contradiction: $\mathrm{R}ab$ et $\neg$ $\mathrm{R}ab$.

**Remarque.** Si l’on avait demandé de vérifier la valide de l’argument suivant: $\exists x\forall y\mathrm{R}xy \models \forall y\exists x\mathrm{R}xy$, on aurait constuit exactement le même arbre, en commençant aux lignes 2 (antécédent de l’argument) et 3 (négation de la conclusion). Il en va de même pour toutes les questions suivantes de cet exercice, qui peuvent toutes être reformulées comme des arguments.

## 3.3 $\forall x\neg\mathbf{P}x \supset \forall x(\mathbf{P}x \supset \mathbf{Q}x)$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg(\forall x\neg\mathrm{P}x \supset \forall x(\mathrm{P}x \supset \mathrm{Q}x))$ | |
| | $\mid$ | |
| 2. | $\forall x\neg\mathrm{P}x$ | $\neg\supset(1)$ |
| 3. | $\neg\forall x(\mathrm{P}x \supset \mathrm{Q}x)$ | $\neg\supset(1)$ |
| | $\mid$ | |
| 4. | $\neg(\mathrm{P}a \supset \mathrm{Q}a)$ | $\neg\forall(3)$ |
| | $\mid$ | |
| 5. | $\mathrm{P}a$ | $\neg\supset(4)$ |
| 6. | $\neg\mathrm{Q}a$ | $\neg\supset(4)$ |
| | $\mid$ | |
| 7. | $\neg\mathrm{P}a$ | $\forall(2)$ |
| | $\times$ | |

L’arbre est fermé. La proposition est donc une tautologie.

Sens: “Si chacun n’a pas d’argent, alors tous ceux qui ont de l’argent sont intelligents.” Note: la seconde partie (le conséquent) est la traduction en calcul des prédicats d’une affirmation universelle. $\forall x(\mathrm{P}x \supset \mathrm{Q}x$ = “Tous les Ps sont Qs”.
(La traduction de l’antécédent n’est pas élégante, mais qui dit mieux? On peut s’écarter de la forme logique: “si personne n’est chauve, alors les chauves sont des tennismen.”)

**Commentaire de l'arbre.** La ligne 6 n'est pas nécessaire.

## 3.4 $\exists x(\mathbf{P}x \supset \mathbf{Q}x) \supset (\forall \mathbf{P}x \supset \exists x\mathbf{Q}x)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\neg(\exists x(\mathrm{P}x \supset \mathrm{Q}x) \supset (\forall \mathrm{P}x \supset \exists x\mathrm{Q}x)$ | | |
| 2. | $\exists x(\mathrm{P}x \supset \mathrm{Q}x)$ | | $\neg \supset (1)$ |
| 3. | $\neg(\forall \mathrm{P}x \supset \exists x\mathrm{Q}x)$ | | $\neg \supset (1)$ |
| 4. | $\forall \mathrm{P}x$ | | $\neg \supset (3)$ |
| 5. | $\neg\exists \mathrm{Q}x$ | | $\neg \supset (3)$ |
| 6. | $\mathrm{P}a \supset \mathrm{Q}a$ | | $\exists(2)$ |
| 7. | $\neg\mathrm{P}a$ | $\mathrm{Q}a$ | $\supset (6)$ |
| 8. | $\mathrm{P}a$ $\quad\forall(4)$ | $\neg\mathrm{Q}a$ $\quad\neg\exists(5)$ | |
| | $\times$ | $\times$ | |

L'arbre est fermé. La proposition est donc une tautologie.

Sens: "S'il y a quelqu'un qui, quand il mange, il boit, alors si tout le monde mange, quelqu'un boit."

**Commentaire de l'arbre.** Ne pas oublier de développer d'abord les connecteurs du calcul propositionnel ($\&, \vee, \supset$). Ici, après avoir posé les lignes (2) et (3) il ne faut pas développer la ligne (2) mais la ligne (3). De même, lorsqu'on a appliqué $\exists$ à la ligne (2), pour obtenir la ligne 6, il faut développer le $\supset$ qu'on vient d'obtenir à la ligne 6, avant de reprendre les quantificateurs.
A la ligne (8), j'ai choisi d'appliquer dans chaque branche la règle qui menait directement à la contradiction.

## 3.5 $\forall x(\mathbf{P}x \ \& \ \mathbf{Q}x) \supset (\forall \mathbf{P}x \ \& \ \forall \mathbf{Q}x)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\neg(\forall x(\mathrm{P}x \ \& \ \mathrm{Q}x) \supset (\forall \mathrm{P}x \ \& \ \forall \mathrm{Q}x))$ | | |
| 2. | $\forall x(\mathrm{P}x \ \& \ \mathrm{Q}x)$ | | $\neg \supset (1)$ |
| 3. | $\neg(\forall \mathrm{P}x \ \& \ \forall \mathrm{Q}x)$ | | $\neg \supset (1)$ |
| 4. | $\neg\forall \mathrm{P}x$ | $\neg\forall \mathrm{Q}x$ | $\neg \ \& \ (3)$ |
| 5. | $\neg \mathrm{P}a$ | $\neg \mathrm{Q}a$ | $\neg\forall(4)$ |
| 6. | $\mathrm{P}a \ \& \ \mathrm{Q}a$ | $\mathrm{P}a \ \& \ \mathrm{Q}a$ | $\forall(2)$ |
| 7. | $\mathrm{P}a$ | $\mathrm{Q}a$ | $\& \ (6)$ |
| | $\times$ | $\times$ | |

L'arbre est fermé. La proposition est donc une tautologie.

Sens: "Si tout le monde est grand et fort, alors tout le monde est grand et tout le monde est fort."

**Commentaire de l'arbre.** Attention à l'ordre d'application, encore une fois. On applique règles du calcul propositionnel, puis les $\exists$ et $\neg\forall$, puis $\forall$ et $\neg\exists$. Et lorsqu'on 'libère', pour ainsi dire, quelque chose qu'on doit développer en priorité, on doit le traiter d'abord. C'est ce qui a lieu dans cet arbre quand on développe la ligne (2): on obtient un connecteur du calcul propositionnel (&, ligne 6), qu'il faudra développer en premier. Comme jusque là il n'était pas 'accessible', on ne peut le traiter que maintenant.
Après avoir obtenu (2) et (3), il faut noter que (3) demande une règle du calcul propositionnel ($\neg$ &). Il faut donc développer (2) avant (3). Après avoir obtenu (4), il faut noter que les règles de (4), à savoir $\neg\forall$, sont les seules règles de type $\exists$ (c'est-à-dire des règles qui introduisent des constantes), et qu'il faut donc développer (4) d'abord.
A la ligne 7, j'ai choisi dans chaque branche une application de & qui donnait la contradiction, en omettant les autres. (On aurait dû rajouter Q$a$ à gauche et P$a$ à droite.)

## 3.6 $(\forall x\mathbf{P}x \supset \exists x\mathbf{Q}x) \supset \exists(\mathbf{P}x \supset \mathbf{Q}x)$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | | $\neg((\forall x\mathrm{P}x \supset \exists x\mathrm{Q}x) \supset \exists(\mathrm{P}x \supset \mathrm{Q}x))$ | | | |
| 2. | | $\forall x\mathrm{P}x \supset \exists x\mathrm{Q}x$ | | | $\neg \supset (1)$ |
| 3. | | $\neg(\exists(\mathrm{P}x \supset \mathrm{Q}x))$ | | | $\neg \supset (1)$ |
| 4. | $\neg\forall x\mathrm{P}x$ | | $\exists x\mathrm{Q}x$ | | $\supset (2)$ |
| 5. | $\neg\mathrm{P}a$ | $\neg\forall(4)$ | $\mathrm{Q}a$ | $\exists(4)$ | |
| 6. | $\neg(\mathrm{P}a \supset \mathrm{Q}a)$ | | $\neg(\mathrm{P}a \supset \mathrm{Q}a)$ | | $\neg\exists(3)$ |
| 7. | $\mathrm{P}a$ | | $\mathrm{P}a$ | | $\neg \supset (6)$ |
| 9. | $\neg\mathrm{Q}a$ | | $\neg\mathrm{Q}a$ | | $\neg \supset (6)$ |
| | $\times$ | | $\times$ | | |

L'arbre est fermé. La proposition est donc une tautologie.

Sens: “Si quand tout le monde mange quelqu'un est rassasié alors il y a quelqu'un qui quand il mange est rassasié.” Cette proposition est la converse de (4), c'est-à-dire que (4) dit $A \supset B$ et que celle-ci dit que $B \supset A$.

## 3.7 $(\exists x\mathbf{P}x \ \& \ \exists x\mathbf{Q}x) \supset \neg\forall(\mathbf{Q}x \supset \neg\mathbf{P}x)$

Il y a une erreur dans la question, la proposition n'est pas une tautologie. (Une tautologie aurait été: $(\exists x\mathrm{P}x \ \& \ \forall x\mathrm{Q}x) \supset \neg\forall(\mathrm{Q}x \supset \neg\mathrm{P}x)$.)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | | | $\neg((\exists x \mathrm{P}x \ \& \ \exists x \mathrm{Q}x) \supset \neg\forall(\mathrm{Q}x \supset \neg \mathrm{P}x))$ | | |
| 2. | | | $\exists x \mathrm{P}x \ \& \ \exists x \mathrm{Q}x$ | | $\neg \supset (1)$ |
| 3. | | | $\neg\neg\forall(\mathrm{Q}x \supset \neg \mathrm{P}x)$ | | $\neg \supset (1)$ |
| 4. | | | $\forall(\mathrm{Q}x \supset \neg \mathrm{P}x)$ | | $\neg(3)$ |
| 5. | | | $\exists x \mathrm{P}x$ | | $\&(2)$ |
| 6. | | | $\exists x \mathrm{Q}x$ | | $\&(2)$ |
| 7. | | | $\mathrm{P}a$ | | $\exists(5)$ |
| 8. | | | $\mathrm{Q}b$ | | $\exists(6)$ |
| 9. | | | $\mathrm{Q}a \supset \neg \mathrm{P}a$ | | $\forall(4)$ |
| 10. | | | $\mathrm{Q}b \supset \neg \mathrm{P}b$ | | $\forall(4)$ |
| 11. | $\neg \mathrm{Q}a$ | | | $\neg \mathrm{P}a$ | $\supset (9)$ |
| 12. | $\neg \mathrm{Q}b$ | $\neg \mathrm{P}b$ | | $\times$ | |
| | $\times$ | $\surd$ | | | |

L'arbre est ouvert. Ce n'est pas une tautologie. Contre-exemple: Domaine= $\{a, b\}$, P={a}, Q={b}.

Sens: "S'il y a quelqu'un de beau et quelqu'un d'intelligent, alors il est faux que tous les gens intelligents ne sont pas beaux." (Et on voit bien que ça ne tient pas...)

### 3.8 $\exists x \forall y(\mathbf{P}y \supset \mathbf{R}xy) \supset (\forall x \mathbf{P}x \supset \exists x \mathbf{R}xx)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\neg(\exists x \forall y(\mathrm{P}y \supset \mathrm{R}xy) \supset (\forall x \mathrm{P}x \supset \exists x \mathrm{R}xx))$ | | |
| 2. | $\exists x \forall y(\mathrm{P}y \supset \mathrm{R}xy)$ | | $\neg \supset (1)$ |
| 3. | $\neg(\forall x \mathrm{P}x \supset \exists x \mathrm{R}xx)$ | | $\neg \supset (1)$ |
| 4. | $\forall x \mathrm{P}x$ | | $\neg \supset (3)$ |
| 5. | $\neg \exists x \mathrm{R}xx$ | | $\neg \supset (3)$ |
| 6. | $\forall y(\mathrm{P}y \supset \mathrm{R}ay)$ | | $\exists(2)$ |
| 7. | $\mathrm{P}a$ | | $\forall(4)$ |
| 8. | $\neg \mathrm{R}aa$ | | $\neg\exists(5)$ |
| 9. | $\mathrm{P}a \supset \mathrm{R}aa$ | | $\forall(6)$ |
| 10. | $\neg \mathrm{P}a$ | $\mathrm{R}aa$ | $\supset (9)$ |
| | $\times$ | $\times$ | |

L'arbre est fermé. La proposition est donc une tautologie.

Sens: "Si quelqu'un aime tous les chiens, alors si tout le monde est un chien il y a quelqu'un qui s'aime lui-même." L'antécédent, $\exists x \forall x(\mathrm{P}y \supset \mathrm{R}xy)$, contient une proposition universelle, $\forall x(\mathrm{P}y \supset \mathrm{R}xy)$ – qu'on traduirait par: $y$ aime tous les chiens. D'où la traduction ci-dessus, plus lègère que "si quelqu'un est tel que, si quelqu'un est aubergiste, le premier l'aime bien,. . . ".

## 3.9 $(\forall x(\mathbf{P}x \supset \neg\mathbf{Q}x)\ \&\ \forall x(\mathbf{P}x\ \&\ \mathbf{R}x)) \supset \exists x\neg\mathbf{Q}x$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\neg((\forall x(\mathrm{P}x \supset \neg\mathrm{Q}x)\ \&\ \forall x(\mathrm{P}x\ \&\ \mathrm{R}x)) \supset \exists x\neg\mathrm{Q}x)$ | | |
| 2. | $\forall x(\mathrm{P}x \supset \neg\mathrm{Q}x)\ \&\ \forall x(\mathrm{P}x\ \&\ \mathrm{R}x)$ | | $\neg\supset(1)$ |
| 3. | $\neg\exists x\neg\mathrm{Q}x$ | | $\neg\supset(1)$ |
| 4. | $\forall x(\mathrm{P}x \supset \neg\mathrm{Q}x)$ | | $\&(2)$ |
| 5. | $\forall x(\mathrm{P}x\ \&\ \mathrm{R}x$ | | $\&(2)$ |
| 6. | $\mathrm{P}a \supset \neg\mathrm{Q}a$ | | $\forall(4)$ |
| 7. | $\mathrm{P}a\ \&\ \mathrm{R}a)$ | | $\forall(5)$ |
| 8. | $\neg\neg\mathrm{Q}a$ | | $\neg\exists(2)$ |
| 9. | $\mathrm{Q}a$ | | $\neg(8)$ |
| 10. | $\neg\mathrm{P}a$ | $\neg\mathrm{Q}a$ | $\supset(6)$ |
| | $\times$ | $\times$ | |

L'arbre est fermé. La proposition est donc une tautologie.

Sens: "Si tous les gens secs ne sont pas mouillés, et si tout le monde est sec et propre, alors quelqu'un n'est pas mouillé."

**Commentaire de l'arbre:** Notez l'**l'usage exceptionnel de** $\forall$, ici lorsqu'on pose la ligne 6. Normalement, on doit juste appliquer $\forall$ en instanciant la proposition concernée pour toutes les constantes déjà introduites. Ici nous sommes dans une situation particulière: lorsqu'on arrive à la ligne 5, il n'y a pas de règle $\exists$ à appliquer, qui puisse introduire une constante. On doit directement passer aux règles $\exists$ et $\neg\forall$ (lignes 3, 4, 5), mais il n'y a aucune constante à laquelle les appliquer. Dans cette situation, on introduit une constante: $a$ à la ligne 6.
Attention: par la suite, les choses retournent à la normale. Lorsqu'on applique $\forall$ à la ligne 5, par exemple, pour obtenir la ligne 7, on instancie la proposition 5 pour la seule constante qui ait déjà été employée: $a$.

## 3.10 $(\exists x \neg \mathbf{P}x \ \& \ \forall x \mathbf{Q}x) \supset \exists x(\mathbf{Q}x \supset \neg \mathbf{P}x)$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg((\exists x \neg \mathrm{P}x \ \& \ \forall x \mathrm{Q}x) \supset \exists x(\mathrm{Q}x \supset \neg \mathrm{P}x))$ | |
| 2. | $\exists x \neg \mathrm{P}x \ \& \ \forall x \mathrm{Q}x$ | $\neg \supset (1)$ |
| 3. | $\neg \exists x(\mathrm{Q}x \supset \neg \mathrm{P}x)$ | $\neg \supset (1)$ |
| 4. | $\exists x \neg \mathrm{P}x$ | $\&(2)$ |
| 5. | $\forall x \mathrm{Q}x$ | $\&(2)$ |
| 6. | $\neg \mathrm{P}a$ | $\exists(4)$ |
| 7. | $\neg(\mathrm{Q}a \supset \neg \mathrm{P}a)$ | $\neg\exists(3)$ |
| 8. | $\mathrm{Q}a$ | $\neg \supset (7)$ |
| 9. | $\neg\neg \mathrm{P}a$ | $\neg \supset (7)$ |
| 10. | $\mathrm{P}a$ | $\neg(9)$ |
| | $\times$ | |

Sens: “Si quelqu’un est ennuyeux et tout le monde est gentil, alors quelqu’un est gentil mais ennuyeux.”

**Commentaire de l’arbre:** Il n’est pas utile de développer la ligne 5.